

Średnie

Kinga Kolczyńska - Przybycień

Średnie

Kinga Kolczyńska - Przybycień

Czym jest średnia?

W wielu zagadnieniach praktycznych, kiedy mamy do czynienia z jakimiś danymi, poszukujemy liczb, które w pewnym sensie charakteryzują te dane.

Na przykład kiedy chcielibyśmy sklasyfikować, powiedzmy przyznać nagrody uczniom, wówczas liczymy zwyczajowo średnią ich ocen.

Danymi w tym przypadku są oceny ucznia, a tym parametrem charakteryzującym jest średnia arytmetyczna ocen.

Ale oczywiście można wziąć inny parametr. Jakie własności powinien ten parametr spełniać, aby można nazwać go średnią?

Czym jest średnia?

Słowo średni w znaczeniu potocznym oznacza pomiędzy małym, a dużym. Taka też jest ogólnie przyjęta definicja. Jest to liczba znajdująca się pomiędzy najmniejszą z danych a największą. Stąd też różne są średnie.

Wybór średniej zależy od rodzaju badanych wielkości i potrzeb analizy danych. Średnia to jedno z podstawowych pojęć działu matematyki zwanego statystyką.

Na tym wykładzie przedstawione zostaną niektóre z nich wraz z pewnymi zastosowaniami oraz niektóre związki między nimi.

Średnia arytmetyczna

Średnią arytmetyczną liczb rzeczywistych x_1, x_2, \dots, x_n nazywamy liczbę :

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

Przykład 1

Oblicz średnią arytmetyczną liczb 3, 5, 7.

Rozwiązanie:

$$\bar{x} = \frac{3 + 5 + 7}{3} = 5$$

Średnia arytmetyczna należy do klasycznych miar średnich i wyraża ona przeciętny poziom obserwowanej cechy.

Stosujemy ją do obliczania np. średniej ocen, średniej wzrostu, wagi czy średniego wynagrodzenia.

Średnia arytmetyczna

Przykład 2

Oblicz średnią temperaturę powietrza z czterech dni:
 $-4.2C^{\circ}$, $-9.7C^{\circ}$, $-3.4C^{\circ}$, $2.5C^{\circ}$ Rozwiązanie:

$$\bar{x} = \frac{-4.2 - 9.7 - 3.4 + 2.5}{4} = -3.7C^{\circ}$$

Średnia geometryczna

Średnią geometryczną liczb rzeczywistych dodatnich x_1, x_2, \dots, x_n nazywamy pierwiastek n -tego stopnia z ich iloczynu, tzn.

$$\bar{x}_g = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}$$

Pojęcie pierwiastka

Pierwiastkiem stopnia n z liczby rzeczywistej dodatniej a ($\sqrt[n]{a}$) nazywamy liczbę rzeczywistą dodatnią b spełniającą równanie:

$$b^n = a.$$

Średnia geometryczna

Przykład 1

Oblicz średnią geometryczną liczb 1, 2, 5 i 1000.

Rozwiązanie:

$$\bar{x}_g = \sqrt[4]{1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 1000} = \sqrt[4]{10000} = 10$$

Średnia geometryczna w statystyce wykorzystywana jest najczęściej do obliczania średniego tempa zmian.

Średnia geometryczna

Przykład 2

Roczne procentowe przyrosty liczby studentów badanych w okresie 5 lat to odpowiednie wzrosty : 2%, 20%, 5% i 50%. Jaki był średni przyrost w tym okresie?

Rozwiązanie:

$$\bar{x}_g = \sqrt[4]{1.02 \cdot 1.20 \cdot 1.05 \cdot 1.50} \approx 1.18$$

$$(1.18 - 1) \cdot 100\% = 18\%$$

Zatem średni przyrost to około osiemnastoprocenty wzrost.

Średnia harmoniczna

Średnią harmoniczną różnych od zera liczb rzeczywistych x_1, x_2, \dots, x_n nazywamy iloraz ilości elementów oraz sumy odwrotności tych elementów:

$$\bar{x}_h = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}}$$

Przykład 1

Oblicz średnią harmoniczną liczb 5, 10, 15.

Rozwiązanie:

$$\bar{x}_h = \frac{3}{\frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15}} = \frac{90}{11}$$

Średnią harmoniczną stosujemy do uśredniania wielkości względnych, czyli wówczas, gdy zmienne wyrażone są w jednostkach względnych, np. prędkość (km/h), czy gęstość zaludnienia (osobach/km²).

Średnia harmoniczna

Przykład 2

Połowę pewnej drogi samochód jechał ze średnią prędkością 60 km/h, a drugą połowę ze średnią prędkością 90 km/h. Z jaką prędkością przejechał całą drogę?

Rozwiązanie:

$$v = \frac{s + s}{t_1 + t_2} = \frac{2s}{t_1 + t_2} = \frac{2}{\frac{t_1}{s} + \frac{t_2}{s}} =$$
$$\frac{2}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}} = \frac{2}{\frac{1}{60} + \frac{1}{90}} = 72 \text{ km/h}$$

Średnia potęgowa

Średnią potęgową rzędu k liczb rzeczywistych dodatnich x_1, x_2, \dots, x_n nazywamy liczbę:

$$\bar{x}_p = \sqrt[k]{\frac{x_1^k + x_2^k + \dots + x_n^k}{n}}$$

Przykład 1

Oblicz średnią potęgową rzędu III liczb $3\sqrt[3]{3}$, i $4\sqrt[3]{3}$, $5\sqrt[3]{3}$.

Rozwiązanie:

$$\bar{x}_p = \sqrt[3]{\frac{(3\sqrt[3]{3})^3 + (4\sqrt[3]{3})^3 + (5\sqrt[3]{3})^3}{3}} = 6$$

Średnia potęgowa ma zastosowania m.in. w statystyce, optymalizacji i fizyce.

Średnia potęgowa

Przykład 2

Stefan ma trzy kwadratowe działki ziemi o bokach 110 m, 50 m i 10 m. Chce podzielić ziemię po równo między swoimi dziećmi: Zosią, Marysią i Tomkiem. Postanowił zamienić działki na trzy także kwadratowe, ale jednakowej wielkości. Jaki musi być bok tych działek?

Rozwiązanie:

$$\bar{x}_p = \sqrt{\frac{110^2 + 50^2 + 10^2}{3}} = \sqrt{\frac{12100 + 2500 + 100}{3}} = \sqrt{\frac{14700}{3}}$$

$$= \sqrt{4900} = 70.$$

Średnia ważona

Każdą z powyższych średnich można uogólnić przypisując danym pewne wagi (znaczenia). W szczególności średnia arytmetyczna ważona liczb rzeczywistych x_1, x_2, \dots, x_n o nieujemnych wagach w_1, w_2, \dots, w_n , przy czym co najmniej jednej różnej od zera wygląda następująco:

$$\bar{x}_w = \frac{w_1x_1 + w_2x_2 + \dots + w_nx_n}{w_1 + w_2 + \dots + w_n}$$

Średnia ważona

Przykład

Oblicz średnią ocen Jasia: prace klasowe (waga 4) oceny: 3, 2, 1

sprawdziany (waga 3) oceny: 4, 3, 5, 3

odpowiedź (waga 2) oceny: 4

zadanie domowe (waga 1) oceny: 1

zadanie dodatkowe (waga 1) oceny: 6

Rozwiązanie:

$$\bar{x}_w = \frac{3 \cdot 4 + 2 \cdot 4 + 1 \cdot 4 + 4 \cdot 3 + 3 \cdot 3 + 5 \cdot 3 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 6 \cdot 1}{4 + 4 + 4 + 3 + 3 + 3 + 3 + 2 + 1 + 1}$$

$$\bar{x}_w = 3$$

Związki między średnimi

Średnie są sobie równe, wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie ich elementy są równe.

Średnia potęgowa dla $k = 1$ jest średnią arytmetyczną, zaś dla $k = -1$ średnią harmoniczną.

Zachodzi następujący związek:

średnia arytmetyczna dwóch liczb jest nie mniejsza, niż ich średnia geometryczna, a ta z kolei nie mniejsza, niż ich średnia harmoniczna.

Związki między średnimi

Rozwiązanie:

Musimy pokazać, że dla dowolnych liczb $x, y > 0$ zachodzą poniższe nierówności:

$$\frac{x + y}{2} \geq \sqrt{x \cdot y} \geq \frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}$$

Mamy kolejno

$$(a - b)^2 \geq 0$$

$$a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$$

$$a^2 + b^2 \geq 2ab \quad | : 2$$

$$\frac{a^2 + b^2}{2} \geq ab$$

Związki między średnimi

Podstawiając

$$a = \sqrt{x}, \quad b = \sqrt{y}$$

otrzymamy

$$\frac{x + y}{2} \geq \sqrt{x \cdot y}.$$

Podstawiając zaś w ostatniej nierówności

$$x = \frac{1}{v}, \quad y = \frac{1}{s}$$

otrzymamy

$$\frac{\frac{1}{v} + \frac{1}{s}}{2} \geq \sqrt{\frac{1}{s} \cdot \frac{1}{v}}$$

Związki między średnimi

skąd

$$\sqrt{sv} \geq \frac{2}{\frac{1}{s} + \frac{1}{v}},$$

zatem

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{x \cdot y} \geq \frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}.$$

Dziękuję za uwagę
Kinga Kolczyńska - Przybycień