Troszkę Geometrii

Kinga Kolczyńska - Przybycień

Troszkę Geometrii

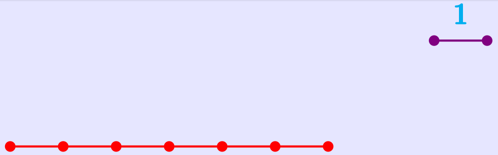
Kinga Kolczyńska - Przybycień

Spis tresci

Spis tresci

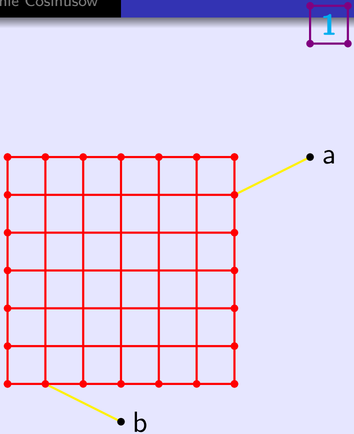
Kilka słów o mierzeniu

Otóż jak sama nazwa **Geometria** (z gr. geo-ziemia, metria-miara) ma ona coś wspólnego z mierzeniem Ziemi, względnie na Ziemi. Otóż zastanówmy się, co my na Ziemi mierzymy? Odpowiedź brzmi mierzymy wszystko, co się da, a nawet to czego się nie da. Ale z matematycznego punktu widzenia najistotniejsze trzy wielkości, które mierzą ludzie to: długość , pole powierzchni , objętość . Jak węc mierzymy na przykład *długość* ,zresztą w pozostałych dwóch przypadkach postępujemy analogicznie. Żeby więc zmierzyć długość odcinka, musimy ustalić jednostkę, czyli odcinek jednostkowy. Gdy już ustalimy nasz odcinek jednostkowy, któremu z definicji przypisujemy miarę 1, a chcemy zmierzyć jakiś inny odcinek, to postępujemy następująco:



Rysunek: Odcinek i odcinek jednostkowy

1. Liczymy, ile całych jednostek mieści się w naszym odcinku.
2. Jeżeli pozostaje jakaś reszta, to dzielimy nasz odcinek jednostkowy na dwie części i liczymy, ile połówek mieści się w tej reszcie.
3. Czynność tą powtarzamy tak długo, aż się nie zakończy, lub tak długo, aż dokładność pomiaru nas nie zadowoli.

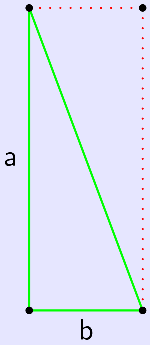


Rysunek: Prostokąt o bokach długości a i b oraz kwadrat jednostkowy.

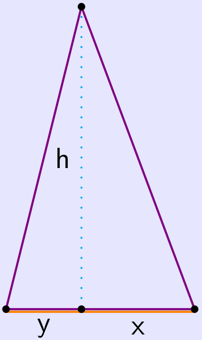
$$P_{pr} = a \cdot b$$

Znając wzór na pole prostokąta łatwo znaleźć wzór na pole trójkąta prostokątnego, wystarczy popatrzeć na poniższy rysunek:

$$P_{tp} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b$$



Gdybyśmy chcieli wyznaczyć wzór na pole dowolnego trójkąta, to wystarczy zauważyć, że zawsze istnieje jego podział na dwa trójkąty prostokątne.

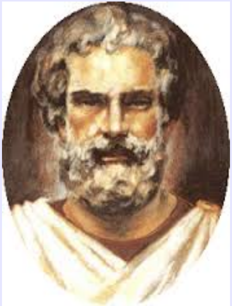


Rysunek: Trójkąt i wzór na jego pole.

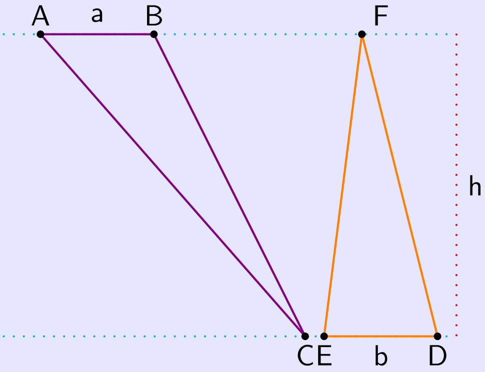
Zatem

$$P_t = \frac{1}{2}xh + \frac{1}{2}yh = \frac{1}{2}h(x+y) = \frac{1}{2}ah$$

gdzie $a = x + y$ jest długością podstawy trójkąta, zaś h jest długością wysokości opuszczoną na tę podstawę.
Następnym naszym celem jest sformułowanie i podanie dowodu Twierdzenia Talesa. Zanim jednak tego dokonamy, musimy udowodnić pewien fakt dotyczący pola trójkąta. Mianowicie:
Jeżeli dwa trójkąty, $\triangle ABC$ i $\triangle DEF$, w których podstawy $|AB|$=a i $|DE|$ =b mają wysokości równej długości opuszczone na te podstawy, to stosunek ich pól jest równy stosunkowi długości ich podstaw.



Tales z Miletu (Thales ho Milesios; VII/VI w. p.n.e.) filozof (uczony) grecki okresu przedsokratejskiego, przedstawiciel jońskiej filozofii przyrody.



Rysunek: Trójkąty wysokościach równej długości.

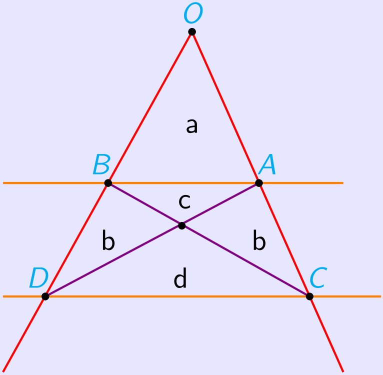
Łatwo widać, że tak jest w istocie, gdyż:

$$\frac{P_{\triangle ABC}}{P_{\triangle DEF}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot a \cdot h}{\frac{1}{2} \cdot b \cdot h} = \frac{a}{b}$$

Przejdźmy teraz do sformułowania Twierdzenia Talesa. Brzmi ono następująco:

Jeżeli ramiona kąta $\angle OAB$ przetniemy dwiema prostymi równoległymi AB i CD, to:

$$\frac{|OA|}{|AC|} = \frac{|OB|}{|BD|}$$



Rysunek: Ilustracja do Twierdzenia Talesa

Dowód opiera się na ciągu równości

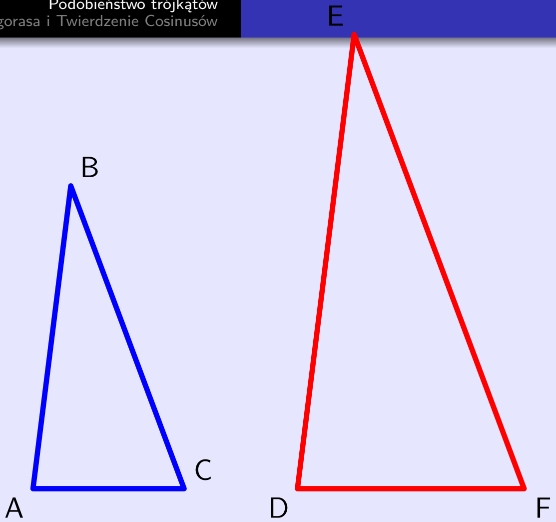
$$\frac{|OA|}{|AC|} = \frac{P_{\triangle OAD}}{P_{\triangle ADC}} = \frac{a+b+c}{b+d} = \frac{P_{\triangle OBC}}{P_{\triangle BCD}} = \frac{|OB|}{|BD|}.$$

Twierdzenie Talesa jest podstawą do wprowadzenia pojęcia podobieństwa trójkątów. Mianowicie

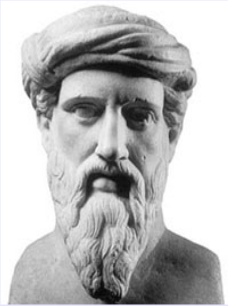
Powiemy, że trójkąty $\triangle ABC$ i $\triangle DEF$ są podobne, jeżeli istnieje liczba rzeczywista s taka,że

$$\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|BC|}{|EF|} = \frac{|CA|}{|FD|} = s.$$

Sens tego pojęcia jest taki, że figury podobne nie różnią się kształtem a jedynie rozmiarami. Z Twierdzenia Talesa wynika m.in., że jeżeli dwa trójkąty mają kąty tej samej miary, to są



Rysunek: Trójkąty podobne.



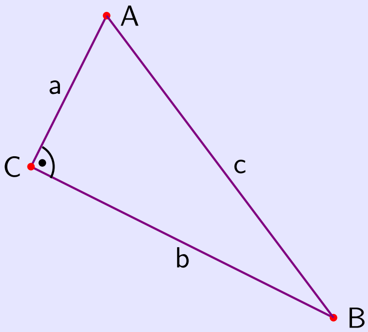
Pitagoras (ur. ok. 572 p.n.e. na Samos lub w Sydonie, zm. ok. 497 p.n.e. w Metaponcie) grecki matematyk, filozof, mistyk.

Naszym następnym celem jest sformułowanie i udowodnienie Twierdzenia Pitagorasa. A brzmi ono tak

Niech $\triangle ABC$ będzie trójkątem o bokach długości a, b, c, przy czym $a, b \leqslant c$. Wówczas trójkąt $\triangle ABC$ jest prostokątny wtedy i tylko wtedy, gdy

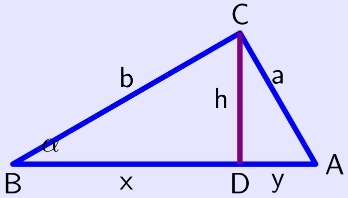
$$a^2 + b^2 = c^2.$$

$$|AC|^2 + |CB|^2 = |AB|^2 = c^2 = a^2 + b^2$$



Udowodnimy to Twierdzenie, ale tylko w jedną stronę tzn. pokażemy, że jeżeli trójkąt jest prostokątny, to

$$a^2 + b^2 = c^2.$$



Rysunek: Ilustracja do dowodu Twierdzenia Pitagorasa

Zauważmy w tym celu, że trójkąty $\triangle ABC$ i $\triangle DBC$ oraz $\triangle ABC$ i $\triangle ADC$ są podobne, gdyż mają odpowiednie kąty równej miary. Zatem

$$\frac{a}{x+y} = \frac{y}{a}$$

i

$$\frac{b}{x+y} = \frac{x}{b}$$

zatem

$$a^2 + b^2 = y(x+y) + x(x+y) = xc + yc = (x+y)c = c \cdot c = c^2$$

Jeżeli mamy dany trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości a i b i przeciwprostokątnej długości c, to możemy wprowadzić następujące wielkości zwane funkcjami trygonometrycznymi:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}$$

Wówczas zachodzi następujące Twierdzenie Cosinusów, które jest uogólnieniem Twierdzenia Pitagorasa. Brzmi ono tak:

Niech $\triangle ABC$, będzie trójkątem, wówczas

$$|AB|^2 = |BC|^2 + |CA|^2 - 2 \cdot |BC| \cdot |CA| \cdot \cos(|\angle ABC|).$$

Uwaga . Pierwiastkiem arytmetycznym stopnia 2 z liczby nieujemnej a, nazywamy jedyną nieujemną liczbę rzeczywistą x dla której prawdą jest, że $x^2 = a$. Liczbę tę oznaczamy $x = \sqrt{a}$.
Dla przykładu

$$\sqrt{144} = 12$$

bo

$$12^2 = 12 \cdot 12 = 144.$$

Dziękuję za uwagę

Kinga Kolczyńska - Przybycień