HORYZONTY MATEMATYKI

ELEMENTY KOMBINATORYKI

ELEMENTY KOMBINATORYKI

Kombinatoryka to dział matematyki, który zajmuje się zliczaniem, na ile sposobów może zajść jakieś zjawisko. Powstała dzięki grom hazardowym a dopiero później rozwinęła się w gałąź nauki.

ELEMENTY KOMBINATORYKI

Celem niniejszego wykładu jest omówienie podstawowych reguł, pojęć i wzorów z kombinatoryki z przykładami ich zastosowań w zadaniach.

ELEMENTY KOMBINATORYKI

REGUŁA ILOCZYNU

Jeżeli pewnego wyboru można dokonać etapami, podejmując wielokrotnie decyzje, co do wyboru poszczególnych elementów, przy czym pierwszą decyzję podejmujemy na n_1 sposobów, drugą - na n_2 sposoby itd. a ostatnią decyzję podejmujemy na n_k sposobów, i jeśli te decyzję są podejmowane niezależnie od siebie, to całkowita liczba możliwych wyborów jest iloczynem liczb podejmowanych decyzji, tzn. wynosi

$$n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_k.$$

ELEMENTY KOMBINATORYKI

Przykład

Mając do dyspozycji: 2 pary butów, 5 par spodni i 7 bluzek na ile sposobów możemy się ubrać?

Rozwiązanie. Ubierając się musimy podjąć 3 decyzje:

I dotyczy butów - wybieramy je na n_1=2 sposoby,

II dotyczy spodni - wybieramy je na n_2=5 sposobów,

III dotyczy bluzki - wybieramy ją na n_3=7 sposobów.

ELEMENTY KOMBINATORYKI

Jeśli nie dopasowujemy kolorów ubrań i decyzje podejmujemy niezależnie dla każdej części garderoby, to na podstawie reguły mnożenia możemy się ubrać na $\mathbf{2 \times 5 \times 7} = 70$ sposobów.

ELEMENTY KOMBINATORYKI

REGUŁA DODAWANIA

Jeżeli mamy wybrać pewien element z dwóch zbiorów **A** i **B** przy czym zbiór **A** ma **m** elementów a zbiór **B** ma **n** elementów i zbiory te **nie mają wspólnych elementów** to wyboru tego dokonać możemy na dokładnie **m+n** sposobów.

ELEMENTY KOMBINATORYKI

Przykład

Mamy do dyspozycji : 3 spódnice żółte i 2 czerwone oraz 4 bluzki żółte i 3 czerwone. Na ile sposobów możemy się ubrać, jeżeli chcemy, aby bluzka i spódnica były w tym samym kolorze?

ELEMENTY KOMBINATORYKI

Rozwiązanie.

Mamy do wyboru dwa kolory, w które możemy się ubrać:

żółty - wtedy musimy wybrać jedną z trzech żółtych spódnic i jedną z czterech żółtych bluzek, zatem możemy ubrać się na żółto na **3×4** = 12 sposobów

albo

czerwony - wtedy musimy wybrać jedną z dwóch czerwonych spódnic i jedną z trzech czerwonych bluzek, zatem możemy ubrać się na czerwono na **2×3** = 6 sposobów

ELEMENTY KOMBINATORYKI

Przykład c.d

Ponieważ ubierając się na żółto nie możemy jednocześnie ubrać się na czerwono i odwrotnie. Zatem zgodnie z regułą dodawania mamy **12+6** = 18 sposobów ubrania się.

ELEMENTY KOMBINATORYKI

PODSTWOWE ZASADY KOMBINATORYKI

Jeżeli podejmujemy kilka niezależnych decyzji częściowych, które dotyczą jednego całościowego wyboru, to **liczby decyzji mnożymy**, jeśli natomiast dokonujemy wykluczających się wyborów, to **liczby wyborów dodajemy**.

ELEMENTY KOMBINATORYKI

PERMUTACJE

Permutacją (przestawieniem) nazywamy ustawienie elementów danego zbioru w pewnej kolejności. Liczba permutacji określa na ile sposobów możemy ustawić elementy zbioru w kolejce.

ELEMENTY KOMBINATORYKI

PERMUTACJE-CD

Powiedzmy, że mamy zbiór A, który ma *n* elementów i chcemy wyznaczyć liczbę wszystkich możliwych ustawień tych elementów w kolejce. Musimy więc podjąć *n* wyborów dotyczących tego, jaki element ustawić na kolejnym miejscu.

I wybór –na pierwszym miejscu w kolejce możemy ustawić każdy z n elementów

II wybór – na drugim miejscu w kolejce możemy ustawić już tylko *n*-1 elementów (bo jeden został już wykorzystany)

III wybór – na trzecim miejscu w kolejce można ustawić już tylko *n*-2 elementy (bo 2 elementy są już wykorzystane),

itd.

ELEMENTY KOMBINATORYKI

PERMUTACJE-CD

(*n*-1)-wszy wybór –na przedostatnim miejscu w tej kolejce możemy ustawić już tylko 2 elementy,

***n*-ty wybór-** na ostatnim miejscu możemy ustawić już tylko jeden element

Zatem zgodnie z regułą mnożenia liczba możliwych wyborów kolejności to:

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 2 \times 1$$

ELEMENTY KOMBINATORYKI

PERMUTACJE-CD

Jest to iloczyn liczb naturalnych od 1 do *n*. Oznaczamy go ***n*!** (czytamy n silnia).

Zatem liczbę P_n wszystkich permutacji zbioru ***n***- elementowego możemy zapisać w następujący sposób:

$$P_n = n!$$

ELEMENTY KOMBINATORYKI

PRZYKŁAD

Na ile sposobów można ustawić w kolejce do kasy biletowej 5 panów i 4 panie, jeżeli:

a) panowie są dżentelmenami i przepuszczają panie przodem?

b) panowie nie byli grzeczni i wepchnęli się przed panie?

c) kolejność nie zależy od płci?

ELEMENTY KOMBINATORYKI

Rozwiązanie a)

Panie można ustawić w obrębie czterech pierwszych miejsc w kolejce na **4! = 4×3×2×1** = 24 sposoby, panów natomiast na kolejnych pięciu miejscach na **5! = 5×4×3×2×1** = 120 sposobów. Każde ustawienie pań może wystąpić z każdym ze 120 ustawień panów. Wyboru kolejności pań i panów dokonujemy niezależnie, więc (korzystając z reguły iloczynu) mamy **4!×5! = 24×120** = 2880 takich możliwych ustawień.

ELEMENTY KOMBINATORYKI

Rozwiązanie b)

Możliwych ustawień jest tyle samo.

Rozwiązanie c)

Ustawiamy w kolejce dziewięcioro ludzi niezależnie od płci, co można zrobić na

9! = $9 \times 8 \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1$ czyli na aż **362 880** sposobów.

ELEMENTY KOMBINATORYKI

WARIACJE

Tworzenie wariacji polega na *k*- krotnym wybieraniu pojedynczych **elementów** z pośród *n* elementów, jakie mamy do dyspozycji. Elementy wybierane są po kolei, a nie wszystkie na raz.

Wyróżniamy dwa rodzaje wariacji, w zależności od tego, czy po wybraniu danego elementu może on być użyty jeszcze raz i wybrany ponownie (nazywamy go **wariacją z powtórzeniami**), czy też raz wybrany element nie może być wybrany ponownie (**wariacja bez powtórzeń**).

ELEMENTY KOMBINATORYKI

WARIACJE Z POWTÓRZENIAMI

Wybieramy kolejno k elementów spośród n, które mamy do dyspozycji. Za każdym razem wybrany element wraca do pozostałych i może być wybrany ponownie. Zatem musimy podjąć k decyzji:

I decyzja - na pierwszym miejscu możemy ustawić dowolny z n elementów,

II decyzja - na drugim miejscu możemy ustawić znowu dowolny z n elementów,

itd.

ELEMENTY KOMBINATORYKI

***k*- ta** decyzja - na ostatnim miejscu możemy ustawić dowolny z *n* elementów.

Na podstawie reguły iloczynu wszystkich możliwych ustawień *k* elementów wybieranych spośród *n* elementów (jeśli wybierane elementy mogą się powtarzać) jest:

$$W_n^k = \underbrace{n \times n \times \ldots \times n}_{k - razy} = n^k$$

ELEMENTY KOMBINATORYKI

Przykład

Ile stacjonarnych numerów telefonicznych jest dostępnych w poznańskiej centrali? Wszystkie numery są dziewięciocyfrowe i zaczynają się numerem kierunkowym 61.

ELEMENTY KOMBINATORYKI

Rozwiązanie

Ponieważ dwie pierwsze cyfry są już ustalone **61**, pozostało nam do rozważenia siedem pozostałych pozycji. Cyfry mogą się na nich powtarzać, a kolejność występowania cyfr w numerze też jest istotna. Wybieramy zatem jedną z 10 cyfr na III miejsce, jedną z 10 na IV miejsce itd. aż jedną z 10 cyfr wybierzemy na ostatnim IX miejscu.

ELEMENTY KOMBINATORYKI

Wyborów kolejnych cyfr dokonujemy niezależnie, zatem jest ich tyle, ile siedmioelementowych wariacji z powtórzeniami ze zbioru dziesięcioelementowego, czyli:

$$W_{10}^{7} = 10^{7}$$

ELEMENTY KOMBINATORYKI

WARIACJE BEZ POWTÓRZEŃ

Wybieramy kolejno *k* elementów spośród *n*, które mamy do dyspozycji, ale raz wybrane elementy nie mogą zostać użyte ponownie. Zatem musimy podjąć *k* decyzji:

I decyzja - na pierwszym miejscu możemy ustawić dowolny z *n* elementów,

II decyzja - na drugim miejscu możemy ustawić znowu dowolny z pozostałych *n*-1 elementów,

itd. (za każdym razem mamy do dyspozycji o 1 element mniej niż poprzednio)

***k*- ta** decyzja - na ostatnim miejscu możemy ustawić dowolny z pozostałych *n*-*k*+1 elementów.

ELEMENTY KOMBINATORYKI

Zatem na podstawie reguły iloczynu liczba wszystkich możliwych k- elementowych wariacji bez powtórzeń ze zbioru n-elementowego wyraża się wzorem:

$$\mathbf{V}_n^k = n \times (n-1) \times \ldots \times (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

ELEMENTY KOMBINATORYKI

Przykłady

W sali lekcyjnej jest 30 miejsc . Na ile sposobów 5 uczniów może zająć miejsca , jeżeli każdy z nich siada gdzie chce?

Rozwiązanie. Każdemu rozmieszczeniu uczniów w klasie (czyli zajęciu przez nich miejsc)odpowiada dokładnie jedna 5-elementowa wariacja bez powtórzeń ze zbioru 30-elementowego, czyli wszystkich możliwych rozmieszczeń będzie dokładnie:

$$V_{30}^{5} = \frac{30!}{25!} = \frac{25! \times 26 \times 27 \times 28 \times 29 \times 30}{25!} = 17100720$$

ELEMENTY KOMBINATORYKI

Kombinacją nazywamy wybór całej grupy *k*-elementowej spośród *n* elementów, jakie mamy do dyspozycji. Nie jest istotna kolejność elementów, jakie wybierzemy, i żaden nie może być wybrany dwukrotnie.

Liczbę takich wyborów zapisujemy tzw. symbolem Newtona $\binom{n}{k}$ (czytamy: n po k).

ELEMENTY KOMBINATORYKI

Każdej kombinacji k- elementowej ze zbioru n- elementowego odpowiada dokładnie k! k- elementowych wariacji bez powtórzeń ze zbioru n- elementowego, gdyż każde k- elementów możemy ustawić w kolejce na k! sposobów. Zatem wszystkich tych kombinacji będzie:

$$C_n^k = \frac{1}{k!} V_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

ELEMENTY KOMBINATORYKI

Przykłady

Klasa liczy 25 osób. Na ile sposobów można wybrać 3-osobową delegację spośród uczniów tej klasy.

Rozwiązanie.

Ważne są dwie rzeczy: nie jest istotna kolejność, w jakiej dokonujemy wyboru uczniów i uczeń może zostać wybrany do delegacji tylko raz.

ELEMENTY KOMBINATORYKI

Wobec tego wystarczy zastosować wzór na liczbę możliwych wyborów 3 elementów spośród 25:

$$\binom{25}{3}=\frac{25!}{3!(25-3)!}=\frac{25!}{3!\times 22!}=\frac{22!\times 23\times 24\times 25}{22!\times 6}=2300$$

ELEMENTY KOMBINATORYKI

Dziękuję za uwagę

Kinga Kolczyńska-Przybycień