Elementy teorii grafów

Kinga Kolczyńska - Przybycień

Elementy teorii grafów

Kinga Kolczyńska - Przybycień

Spis tresci

Spis tresci

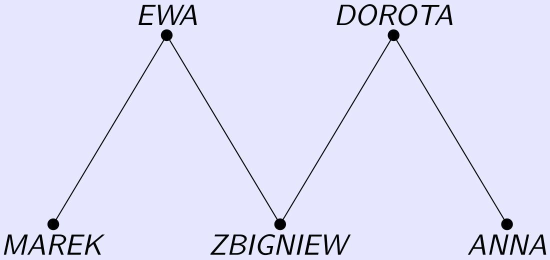
Wprowadzenie

Wprowadzenie

Wprowadzenie

Często w zagadnieniach praktycznych rozważa się pewien zbiór obiektów wraz z zależnościami jakie łączą te obiekty. Dla przykładu można badać pewną grupę ludzi oraz strukturę znajomości pomiędzy nimi. Mówiąc bardziej precyzyjnie, powiedzmy, że mamy pięć osób: Marka, Ewę , Zbigniewa , Dorotę i Annę . Ponadto wiemy, że pary znajomych wśród nich to: Marek i Ewa, Ewa i Zbigniew, Zbigniew i Dorota, Dorota i Anna. Zbiór tych osób oraz strukturę ich znajomości możemy przedstawić za pomocą poniższej ilustracji.

Wprowadzenie



Wprowadzenie

Rozważmy następujące zagadnienie. Mamy za zadanie poinformować wszystkie pięć osób, przy czym informację możemy przekazać tylko jednej z nich, a każda osoba może ją przekazać swoim znajomym. Powiedzmy, że przekazanie wiadomości przez osobę swoim znajomym trwa jedną jednostkę czasu, komu należy przekazać wiadomość, aby wszystkie osoby zostały poinformowane, w jak najkrótszym czasie.
Łatwo widać, że w naszym przypadku informację należy przekazać Zbigniewowi. Wówczas poinformowanie wszystkich osób zajmie dwie jednostki czasowe i będzie to najkrótszy możliwy czas.
Tego typu zagadnienia są często rozważane w *teorii grafów* czyli dziale matematyki zajmującym się *grafami.* Przejdźmy zatem do samej teorii i wprowadźmy kilka podstawowych pojęć.

Definicja grafu prostego

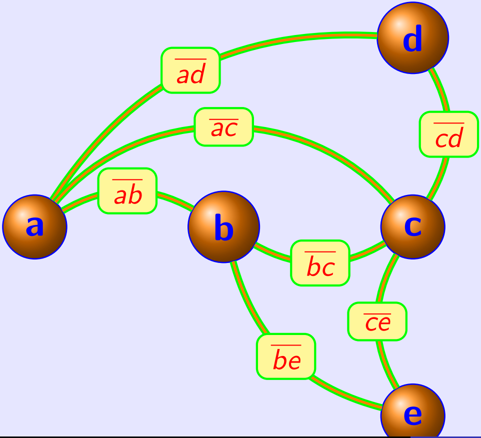
Definicja. *Grafem prostym* nazywamy parę $G = (V(G), E(G))$, gdzie

1. $V(G)$ jest zbiorem *wierzchołków* grafu, które oznaczamy zazwyczaj literami $v_1, v_2, v_3, ..., v_n$, tzn.
$$V(G) = \{v_1, v_2, ..., v_n\}.$$
2. $E(G)$ jest zbiorem *krawędzi* grafu, które łączą jego wierzchołki i są zazwyczaj oznaczane literami $e_1, e_2, ..., e_m$, tzn.
$$E(G) = \{e_1, e_2, ..., e_m\}$$

Ponadto, co najwyżej jedna krawędź łączy dowolne dwa wierzchołki, oraz nie ma krawędzi o końcu i początku w tym samym punkcie (tzw. pętli). Przy czym, jeżeli krawędź e łączy wierzchołek v_i z wierzchołkiem v_j, to piszemy również $e = \overline{v_i v_j}$.

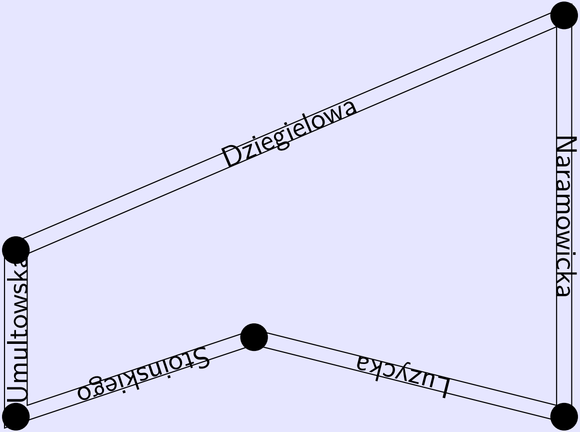
Przykłady grafów

Dla przykładu gdybyśmy mieli zilustrować graf (V, E), gdzie $V = \{a, b, c, d, e\}$ oraz $E = \{\overline{ab}, \overline{ac}, \overline{ad}, \overline{bc}, \overline{be}, \overline{cd}, \overline{ce}\}$, to wyglądał by on następująco:



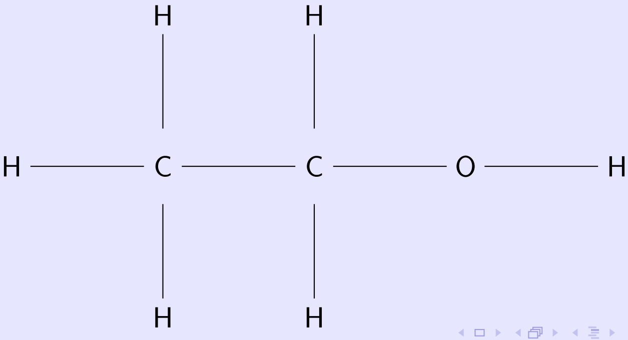
Przykłady grafów

Przykładem grafu, który spotykamy na co dzień jest mapa ulic, wówczas rolę wierzchołków pełnią skrzyżowania, a krawędzi ulice.



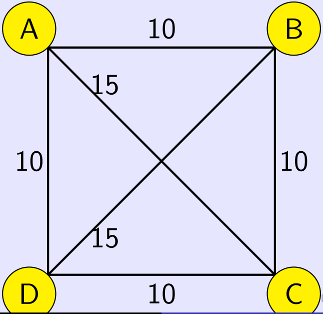
Przykłady grafów

Inne obiekty ze świata rzeczywistego, któr mają strukturę grafu, są to tzw. wzory strukturalne cząsteczek substancji chemicznych, to grafy, w których rolę wierzchołków pełnią atomy pierwiastków, zaś rolę krawędzi wiązania między atomami. Poniżej przedstawiamy wzór strukturalny cząsteczki alkoholu etylowego C_2H_5OH.



Problem komiwojażera

Innym przykładem problemu ściśle powiązanego z teorią grafów jest tzw. *problem komiwojażera.* Problem ten w uproszczeniu wygląda mniej więcej tak: Powiedzmy, że mamy np. cztery miasta, położone tak, jak na grafie poniżej. Przy czym krawędzie tego grafu oznaczaja, drogi pomiędzy tymi miastami, zaś liczby na krawędziach oznaczają długości tych dróg.



Problem komiwojażera

Komiwojażer ma za zadanie wyruszyć z miasta powiedzmy A dostarczyć towar do pozostałych miast i wrócić z powrotem do miasta A przy czym ma to zrobić w taki sposób, aby droga jaką pokona była najkrótsza.
W naszym przypadku rozwiązanie tego problemu będą stanowiły "cykle" :

$$A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A$$

oraz

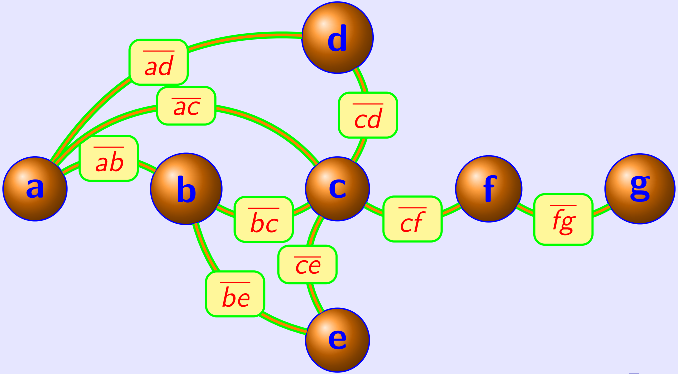
$$A \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow A,$$

których długość wynosi 40 i najkrótszą z możliwych.

Stopień wierzchołka w grafie

Definicja (Stopnia wierzchołka). *Stopniem* $d(v) = d_G(v)$ *wierzchołka* v *w grafie* G nazywamy liczbę krawędzi grafu G o jednym z końców równym v.

Przykład. Dla grafu G przedstawionego na poniższym rysunku



Stopień wierzchołka w grafie

mamy:

$$d_G(a) = 3, d_G(b) = 3, d_G(c) = 5, d_G(d) = 2,$$

$$d_G(e) = 2, d_G(f) = 2, d_G(g) = 1.$$

Policzmy, ilość wszystkich krawędzi grafu G, jest ich $|E(G)| = 9$. I zauważmy, że

$$d_G(a) + d_G(b) + d_G(c) + d_G(d) + d_G(e) + d_G(f) + d_G(g) =$$

$$= 3 + 3 + 5 + 2 + 2 + 2 + 1 = 18 = 2 \cdot 9 = 2|E(G)|.$$

Zależność ta nie jest przypadkowa, gdyż zachodzi następujące twierdzenie:

Definicja ścieżki w grafie

Twierdzenie. Dla dowolnego grafu $G = (V, E)$, o zbiorze wierzchołków $V = \{v_1, v_2, ..., v_k\}$, zachodzi równość

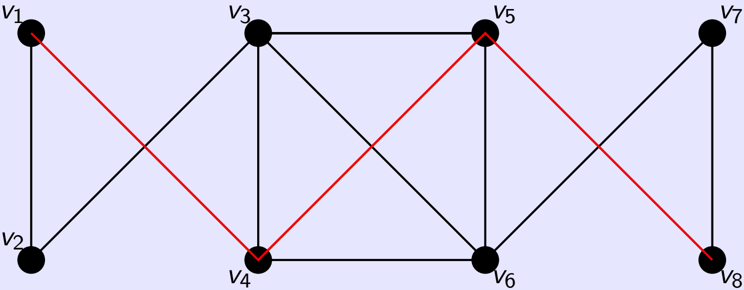
$$d_G(v_1) + d_G(v_2) + ... + d_G(v_k) = 2 \cdot |E|,$$

gdzie $|E|$ oznacza liczbę krawędzi grafu G.

Definicja (ścieżki w grafie) Niech $G = (V(G), E(G))$ będzie grafem i niech $v_0, v_n \in V(G)$. *Ścieżką łączącą* v_0 *z* v_n *o długości* n nazywa się ciąg wierzchołków $(v_0, v_1, ..., v_n)$ taki, że dla każdego $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ istnieje krawędź o końcach v_k i v_{k+1}.

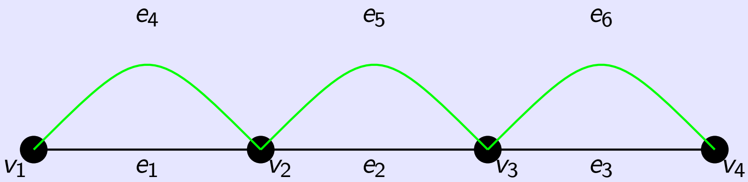
Definicja ścieżki w grafie

Poniżej przedstawiono graf prosty o wierzchołkach $v_1, \ldots, v_8$ oraz na czerwono ścieżkę (v_1, v_4, v_5, v_8) długości 3 łączącą wierzchołki v_1 i v_8.



Oznaczanie ścieżek w grafach, które nie są proste

Jeżeli G nie jest grafem prostym zapis $(v_1, v_2, ..., v_n)$ na oznaczenie scieżki łączącej wierzchołek v_1 z v_n może być niejednoznaczny, jak to pokazuje poniższy przykład:



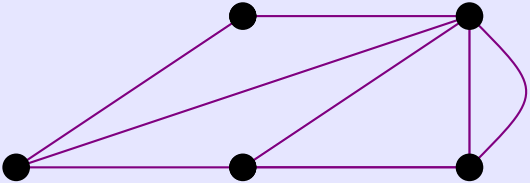
Zapis (v_1, v_2, v_3, v_4) nie ma jednoznacznego znaczenia gdyż nie wiemy po jakich krawędziach sie poruszamy idąc od wierzchołka v_1 do wierzchołka v_4. Dlatego w grafach, które posiadają krawędzie wielokrotne (tzn. dwie lub więcej łączące tę samą parę wierzchołków) ścieżki oznaczamy wypisując ich krawędzie.

Grafy spójne

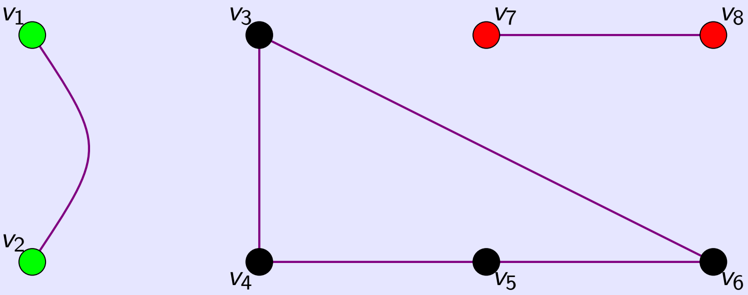
I tak zapis $(v_1, e_1, e_5, e_3, v_4)$ oznacza ścieżkę w której starujemy z wierzcholka v_1, następnie idziemy krawędzią e_1 do v_2, potem krawędzią e_5 do v_3 i w końcu krawędzią e_3 do v_4.

Definicja. Graf G nazywamy *grafem spójnym*, jeżeli dowolne dwa jego wierzchołki można połączyć ścieżką .

Poniżej przedstawiamy przykład grafu spójnego oraz takiego, który spójny nie jest.



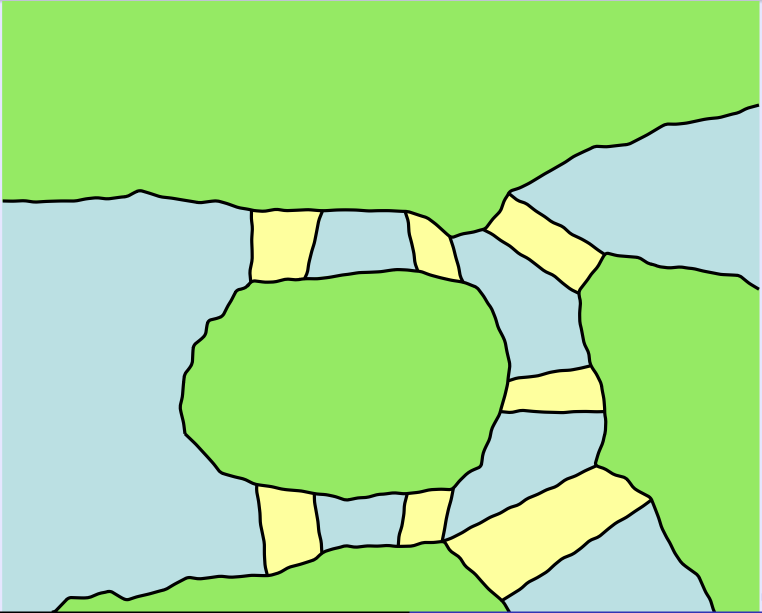
Grafy spójne



Powyższy graf nie jest spójny, ponieważ nie istnieje ścieżka łącząca np. wierzchołki v_1 i v_3.

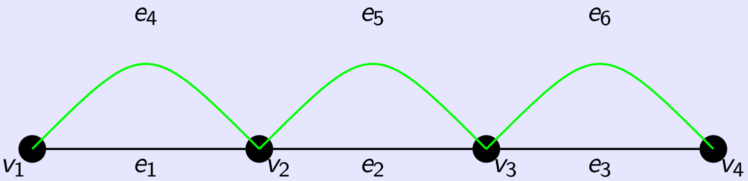
Zagadnienie mostów królewieckich

Zagadnienie mostów królewieckich problem, nad którym rzekomo głowili się mieszkańcy Królewca, a który rozwiązał w XVIII wieku Leonhard Euler.
Przez Królewiec przepływała rzeka Pregoła, w której rozwidleniach znajdowały się dwie wyspy. Ponad rzeką przerzucono siedem mostów, z których jeden łączył obie wyspy, a pozostałe mosty łączyły wyspy z brzegami rzeki. Problem, którym zainteresował się Euler, był następujący: czy można przejść kolejno przez wszystkie mosty tak, żeby każdy przekroczyć tylko raz.



Ścieżki Eulera

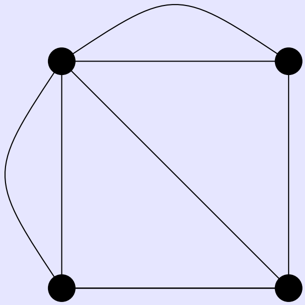
Definicja (Ścieżki Eulera). *Ścieżka Eulera* to taka ścieżka w grafie, która przechodzi przez każdą jego krawędź dokładnie raz.



W powyższym grafie scieżka $(v_1, e_4, e_5, e_6, e_3, e_2, e_1, v_1)$ jest ścieżką Eulera.

Zagadnienie mostów królewieckich

Powróćmy teraz do *zagadnienia mostów królewieckich* i popatrzmy na to zagadnienie w następujący sposób. Potraktujmy obszary na jakie rzeka dzieli ląd jako wierzchołki grafu, zaś mosty pomiędzy tymi obszarami jako krawędzie. Otrzymamy wówczas następujący graf:



Zagadnienie mostów królewieckich

Patrząc w ten sposób zagadnienie to sprowadza się do pytania czy w powyższym grafie istnieje scieżka Eulera. Odpowiedź jest negatywna, co wynika z następującego twierdzenia udowodnionego przez Eulera:

Twierdzenie W grafie spójnym istnieje scieżka Eulera wtedy i tylko wtedy, gdy liczba wierzchołków stopnia nieparzystego wynosi 0 lub 2.

Dziękuję za uwagę

Kinga Kolczyńska - Przybycień