

HORYZONTY MATEMATYKI

CIĄGI LICZBOWE

CIĄGI LICZBOWE

Naturalną rzeczą w otaczającym nas świecie jest porządkowanie różnorodnych obiektów, czyli ustawianie ich w pewnej kolejności.

Dla przykładu tworzymy różnego rodzaju rankingi, np. ranking najlepszych kierowców rajdowych. Tzn. ustawiamy kierowców rajdowych w kolejności od najlepszego do najsłabszego.

CIĄGI LICZBOWE

Takie właśnie ustawianie obiektów w pewnej kolejności wiąże się ściśle z pojęciem ciągu, które jest fundamentalnym pojęciem działu matematyki zwanego *analizą matematyczną*.

CIĄGI LICZBOWE

Celem niniejszego wykładu jest omówienie podstawowych własności pewnych wybranych ciągów, które pełnią istotną rolę, zarówno w matematyce, jak i otaczającym nas świecie z przykładami ich zastosowań w zadaniach.

CIĄGI LICZBOWE

Ciągiem nazywamy pewną ilość obiektów ustawionych po kolei, lub, co na jedno wychodzi pewną ilość obiektów ponumerowanych kolejnymi liczbami naturalnymi.

CIAŁGI LICZBOWE

Jeżeli ilość obiektów, które ustawiamy w ciąg jest skończona, to mamy do czynienia z ciągiem skończonym.

Jeżeli natomiast ilość obiektów, które ustawiamy w ciąg jest nieskończona, to mówimy o ciągu nieskończonym.

CIĄGI LICZBOWE

Jeżeli obiekty, które ustawiamy w ciąg są liczbami, to ten ciąg nazywamy ***ciągami liczbowymi***.

Ciągi oznaczamy małymi literami, natomiast wyrazy ciągu, czyli obiekty, z których ten ciąg się składa, oznaczamy małymi literami wraz z liczbą, która informuje nas, na którym miejscu w danym ciągu ten wyraz występuje.

CIĄGI LICZBOWE

Przykład

Ciąg liter nazwiska każdego człowieka jest przykładem ciągu skończonego.

Jeżeli przez a oznaczymy ciąg liter nazwiska Kowalski, to $a_1 = K$, $a_2 = o$, $a_3 = w$, $a_4 = a$, $a_5 = l$, $a_6 = s$, $a_7 = k$, $a_8 = i$.

CIĄGI LICZBOWE

Przykład

Przykładem ciągu nieskończonego może być ciąg wszystkich naturalnych wielokrotności liczby 5 ustawiony w kolejności od najmniejszej.

$$a = (5; 10; 15; 20; 25; 30; 35; 40; \dots)$$

Jest to zarazem przykład ciągu liczbowego.

CIĄGI LICZBOWE

Jednym z bardziej elementarnych a zarazem bardzo ważnym jest pojęcie *ciągu arytmetycznego*, zwanego również *postępem arytmetycznym*.

Ciągiem arytmetycznym nazywamy ciąg (a_n) o tej własności, że różnica pomiędzy dowolnym wyrazem a wyrazem bezpośrednio poprzedzającym go jest stała i wynosi r .

Liczbę tę nazywamy **różnicą ciągu arytmetycznego**.

CIĄGI LICZBOWE

Przykład

Ciąg kolejnych liczb naturalnym jest ciągiem arytmetycznym

$(1; 2; 3; 4; 5; \dots)$

Różnica tego ciągu wynosi :

$$r = 2 - 1 = 3 - 2 = 4 - 3 = \dots = 1$$

CIĄGI LICZBOWE

Każdy ciąg stały tzn. postaci $(a, a, a, a, a, \dots)$ jest również przykładem ciągu arytmetycznego, którego różnica wynosi

$$r = a - a = a - a = 0$$

Każdy ciąg arytmetyczny jest jednoznacznie wyznaczony przez swój pierwszy wyraz oraz różnicę. Więcej, jeżeli znamy którykolwiek wyraz ciągu arytmetycznego oraz jego różnicę, to możemy wyznaczyć wszystkie jego wyrazy.

CIĄGI LICZBOWE

Wzór na *n*-ty wyraz ciągu arytmetycznego

Zauważmy, że

$$a_n = a_{n-1} + r = a_{n-2} + 2r = \dots = a_{n-(n-1)} + (n-1)r = a_1 + (n-1)r$$

**Łącząc pierwszą i ostatnią równość
otrzymujemy wzór na *n*-ty wyraz ciągu
arytmetycznego**

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

CIĄGI LICZBOWE

Równie prosto, jak wyznaczać n -ty wyraz ciągu arytmetycznego można sumować wyrazy ciągu arytmetycznego, o czym może świadczyć następująca anegdota:

Niepokorny Gauss i suma ciągu arytmetycznego

Anegdota ta dotyczy wielkiego niemieckiego matematyka Carla Friedricha Gaussa
(1777 – 1855 r.)

CIĄGI LICZBOWE

Carl Gauss siedział znudzony na lekcji matematyki. Nietrudno wyobrazić sobie dlaczego - Gauss był nieprzeciętnym uczniem, a lekcje matematyki 300 lat temu nie były tak ciekawe jak dziś. A więc Gauss nudził się, przez co często wpadał w tarapaty.

CIĄGI LICZBOWE

Któregoś razu, kiedy Carl znów nie zajmował się lekcją, nauczyciel zdenerwował się i krzyknął:

"Gauss! Jeżeli jesteś tak potwornie znużony lekcją, mam dla ciebie zadanie: pójdziesz do kąta i zsumujesz liczby od jednego do stu. To powinno cię zająć na jakiś czas."



CIĄGI LICZBOWE

Gauss poszedł do kąta, ale nie wyglądał jakby cokolwiek liczył. Nauczyciel znów krzyknął:

"Gauss! Widzę, że zdążyłeś już dodać te wszystkie liczby."

Gauss odpowiedział: "Jasne. To 5 050.,,

Oczywiście nauczyciel nie uwierzył, że można było to tak szybko obliczyć. Następne 10 minut spędził dodając po kolei wszystkie liczby, by przyłapać ucznia na kłamstwie

$$\begin{array}{r} 1 \\ + 2 \\ \hline 3 \\ + 3 \\ \hline 6 \\ + 4 \\ \hline 10 \\ + 5 \\ \hline 15 \\ + \dots \end{array}$$

CIĄGI LICZBOWE

Kiedy zorientował się, że Carl ma rację, pewnie i tak kazał mu zostać w kozie. Albo trzepnął go linijką za to, że był od niego sprytniejszy.

Może cała ta historyjka jest zmyślona? Kto wie...

Zastanówmy się jak mógł to zrobić Gauss?

Zapiszmy w tym celu szukaną sumę i oznaczmy ją literą **S**

$$1 + 2 + \dots + 99 + 100 = S$$

CIĄGI LICZBOWE

Zapiszmy teraz tą samą sumę ale ustawmy jej składniki w odwrotnej kolejności

$$100 + 99 + \dots + 2 + 1 = S$$

Dodajmy teraz do siebie te dwie sumy ale w ten sposób, że dodajemy pierwszy składnik pierwszej sumy do pierwszego składnika drugiej sumy, drugi składnik pierwszej sumy do drugiego składnika drugiej sumy, itd...

CIĄGI LICZBOWE

Otrzymamy w ten sposób następującą sumę

$$(1+100) + (2+99) + \dots + (99+2) + (100+1) = 2S$$

Otrzymujemy w ten sposób sumę stu składników z których każdy jest równy liczbie 101, więc

$$100 \times 101 = 2S$$

Zatem

$$S = 5050$$

CIĄGI LICZBOWE

Bazując na tym samym pomysśle można łatwo wyznaczyć wzór na sumę S_n – początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego.

Zauważmy w tym celu, że

$$a_k + a_{n-k+1} = a_1 + (k-1)r + a_1 + (n-k)r = a_1 + [a_1 + (n-1)r] = a_1 + a_n$$

Zatem

$$\begin{aligned} 2S_n &= S_n + S_n = (a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n) + (a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n) = \\ &= (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \dots + (a_k + a_{n-k+1}) + \dots + (a_n + a_1) = \end{aligned}$$

CIĄGI LICZBOWE

$$= (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \dots + (a_1 + a_n) = n \times (a_1 + a_n)$$

Skąd

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \times n}{2}$$

CIĄGI LICZBOWE

Przykład, który teraz podamy pochodzi z tzw. Papirusu Moskiewskiego napisanego ok. 2000 roku p.n.e w Starożytnym Egipcie.

Podziel 10 miar zboża między 10 ludzi tak, by różnica między każdym człowiekiem, a następnym wynosiła $\frac{1}{8}$ miar.

CIĄGI LICZBOWE

Rozwiązanie

Mamy dane

$$S_{10} = 10$$

$$n = 10$$

$$r = \frac{1}{8}$$

Szukamy $a_1, a_2, \dots, a_{10}$, korzystając z wzoru na n-ty wyraz ciągu arytmetycznego otrzymujemy

CIĄGI LICZBOWE

$$a_{10} = a_1 + 9r = a_1 + \frac{9}{8}$$

Wstawiając powyższe wyrażenie do wzoru na S_{10}
Otrzymujemy

$$10 = S_{10} = \frac{a_1 + a_1 + \frac{9}{8}}{2} \times 10$$

Zatem

$$1 = a_1 + \frac{9}{16}$$

Ciągi Liczbowe

Więc

$$a_1 = \frac{7}{16}, a_2 = \frac{9}{16}, a_3 = \frac{11}{16}, a_4 = \frac{13}{16}, a_5 = \frac{15}{16}, a_6 = \frac{17}{16}, a_7 = \frac{19}{16}, a_8 = \frac{21}{16}, a_9 = \frac{23}{16}, a_{10} = \frac{25}{16}$$

CIĄGI LICZBOWE

Kolejnym elementarnym i ważnym ciągiem jest *ciąg geometryczny*, zwany również *postępem geometrycznym*.

Ciągiem geometrycznym nazywamy ciąg (a_n) liczb rzeczywistych różnych od zera o tej własności, że iloraz dowolnego wyrazu przez wyraz bezpośrednio poprzedzający go jest stały i wynosi q . Tę liczbę q nazywamy ***ilorazem ciągu geometrycznego***.

CIĄGI LICZBOWE

Przykład

Ciąg (1, 2, 4, 8, 16, 32, 64,...) jest przykładem ciągu geometrycznego o ilorazie $q = 2$.

Podobnie jak ciąg arytmetyczny, również i ciąg geometryczny jest jednoznacznie wyznaczony przez jego pierwszy wyraz a_1 i iloraz q . Więcej, również i ciąg geometryczny ma tę własność, że jeśli znamy jego dowolny wyraz oraz iloraz, to możemy wyznaczyć każdy inny wyraz tego ciągu.

CIĄGI LICZBOWE

W przeciwieństwie do ciągu arytmetycznego wyrazy ciągu geometrycznego mogą rosnać bardzo szybko, co obrazuje następująca bajka:

Bajka o królu, szachach i ziarnach pszenicy

Dawno, dawno temu żył sobie król, który się strasznie nudził. Nie bawił go fechtunek, ani jazda konna, ani nawet turniej rycerski. Był tak znudzony, że rozesłał wici po całym kraju i do państw przyjaznych - kto przyniesie interesującą grę, tego nie minie wysoka nagroda.

CIĄGI LICZBOWE

Pewnego dnia zjawił się na zamku starszy człowiek, cudzoziemiec. Przedstawił królowi swoją grę (szachy), a ten tak się nią zachwycił, że postanowił ofiarować autorowi wszystko, czego ten zażąda.

Autor poprosił o pozornie skromną nagrodę - aby na pierwsze pole szachownicy położono 1 ziarno pszenicy, na drugie 2 ziarna, na trzecie 4 ziarna i na każde następne pole dwa razy więcej ziaren niż na pole poprzednie.

CIĄGI LICZBOWE

Król się tylko zaśmiał i powiedział, żeby ów starszy człowiek podał mu po prostu liczbę worków z ziarnem, bo worki wygodniej liczyć, ale autor się uparł na dokładnie taką liczbę ziaren - ani mniej ani więcej.. Nieco rozbawiony takim zachowaniem król poszedł więc do swoich matematyków, żeby mu obliczyli, ile mniej więcej worków ziarna żąda ów cudzoziemiec. Gdy matematycy podali mu wynik, to zrzędała mu mina - okazało się, że tyle ziarna, to nie ma ani w jego królestwie, ani nawet na całym znanym świecie.

Ciągi Liczbowe

Obliczmy ile ziaren pszenicy zażądał autor za wynalezienie szachów,

$$1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{63} = S$$

Zauważmy, że

$$S = (2-1)S = 2S - S = 2 + 2^2 + \dots + 2^{64} - 1 - 2 - 2^2 - \dots - 2^{63} = 2^{64} - 1$$

Więc honorarium wynosiło 18446744073709551615 ziaren pszenicy.

CIĄGI LICZBOWE

Wzór na n - ty wyraz ciągu geometrycznego
Zauważmy, że

$$a_n = a_{n-1}q = a_{n-2}q^2 = \dots = a_{n-(n-1)}q^{n-1} = a_1q^{n-1}$$

Łącząc pierwszą i ostatnią równość
otrzymujemy wzór na *n-ty* wyraz ciągu
geometrycznego

$$a_n = a_1q^{n-1}$$

CIĄGI LICZBOWE

Podobnie jak dla ciągu arytmetycznego można nietrudno wyznaczyć wzór na sumę S_n – początkowych wyrazów ciągu geometrycznego

Zauważmy w tym celu, że

$$a_k \times q = a_1 q^{k-1} \times q = a_1 q^k = a_{k+1}$$

Zatem

$$\begin{aligned}(1-q)S_n &= S_n - qS_n = (a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n) - q(a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n) = \\ &= (a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n) - (qa_1 + qa_2 + \dots + qa_{n-1} + qa_n) =\end{aligned}$$

CIĄGI LICZBOWE

$$\begin{aligned} &= (a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n) - (a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n + a_{n+1}) = \\ &= a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n - a_2 - \dots - a_{n-1} - a_n - a_{n+1} = a_1 - a_{n+1} \end{aligned}$$

Otrzymaliśmy więc następującą równość

$$(1-q)S_n = a_1 - a_{n+1}$$

Skąd

$$S_n = \frac{a_1 - a_{n+1}}{1-q} = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$$

CIĄGI LICZBOWE

W słynnym papirusie egipskim znajduje się następujący zapis:

Siedmiu ludzi ma po 7 kotów, każdy zjada 7 myszy, każda mysz zjada 7 kłosów, z każdego kłosa może wyrosnąć 7 miar zboża Ile razem było ludzi, kotów, myszy, kłosów i miar zboża

CIĄGI LICZBOWE

Rozwiązanie:

Mamy

$a_1 = 7$ (bo mamy siedmiu ludzi)

$a_2 = 7^2$ (bo każda osoba ma 7 kotów)

$a_3 = 7^3$ (bo każdy kot zjada 7 myszy)

$a_4 = 7^4$ (bo każda mysz zjada 7 kłosów)

$a_5 = 7^5$ (bo z każdego kłosa wyrośnie 7 miar zboża)

CIĄGI LICZBOWE

Czyli wszystkich rzeczy razem mamy:

$$7 + 7^2 + \dots + 7^5 = \frac{7 - 7^6}{1 - 7} = 19607$$

CIĄGI LICZBOWE

Dziękuję za uwagę

Kinga Kolczyńska-Przybycień