Wielkopolskie Mecze Matematyczne

edycja druga

3 kwietnia 2015r.

W okresie renesansu we Włoszech matematycy stworzyli ciekawą formę rywalizacji intelektualnej. Wymieniali się zadaniami, a po kilku tygodniach publicznie „pojedynkowali". Każdy przedstawiał rozwiązania zadań zaproponowanych przez przeciwnika. Zwyciężał ten, kto rozwiązał większą liczbę zadań, otrzymanych wcześniej od innych startujących.

Od 24 października do 13 grudnia 2014 na Wydziale Matematyki i Informatyki Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza, odbyła się druga edycja Wielkopolskich Meczy Matematycznych. Zawody były wzorowane na Dolnośląskich Meczach Matematycznych. Osiem dziesięcioosobowych drużyn z poznańskich liceów rywalizowało o zwycięstwo.

Turniej był współfinansowany przez Poznańską Fundację Matematyczną ze środków pozyskanych od Miasta Poznania na realizację projektu „Matematyka dla zuchwałych".

Niniejsza broszura prezentuje przebieg tej rywalizacji. Zawiera także zadania konkursowe.

Wyniki

Grupa A

VI LO	-	LO MM	**26**	:	**42**
I LO	-	II LO	**29**	:	**40**
LO MM	-	I LO	**60**	:	**14**
II LO	-	VI LO	**33**	:	**13**
II LO	-	LO MM	**38**	:	**38**
VI LO	-	I LO	**27**	:	**17**

TABELA

1.	LO MM	**5pkt**	140-78	+62
2.	II LO	**5pkt**	111-80	+31
3.	VI LO	**2pkt**	66-92	-26
4.	I LO	**0pkt**	50-127	-57

Grupa B

VII LO	-	V LO	**27**	:	**26**
VIII LO	-	III LO	**44**	:	**33**
V LO	-	III LO	**19**	:	**23**
VIII LO	-	VII LO	**38**	:	**17**
VIII LO	-	V LO	**41**	:	**15**
VII LO	-	III LO	**17**	:	**19**

TABELA

1.	VIII LO	**6pkt**	123-65	+58
2.	III LO	**4pkt**	75-80	-5
3.	VII LO	**2pkt**	61-83	-20
4.	V LO	**0pkt**	60-91	-31

PÓŁFINAŁY

LO MM	-	III LO	39	:	32
VIII LO	-	II LO	35	:	28,4

FINAŁ

Liceum Ogólnokształcące św. Marii Magdaleny	-	**VIII Liceum Ogólnokształcące im. Adama Mickiewicza**
27,6	:	**28,6**

Ostateczna klasyfikacja

1. VIII Liceum Ogólnokształcące im. Adama Mickiewicza
2. Liceum Ogólnokształcące św. Marii Magdaleny
3. II Liceum Ogólnokształcące im. Gen. Zamoyskiej i Heleny Modrzejewskiej
3. III Liceum Ogólnokształcące im. św. Jana Kantego
5. VI Liceum Ogólnokształcące im. Ignacego Jana Paderewskiego
5. VII Liceum Ogólnokształcące im. Dąbrówki
7. I Liceum Ogólnokształcące im. Karola Marcinkowskiego
7. V Liceum Ogólnokształcące im. Klaudyny Potockiej

Zadania

1. kolejka WMM 2014 (jesień)
24 października 2014, godz. 8:30
Wydział Matematyki i Informatyki UAM w Poznaniu

Zadanie 1. Stosunek dwóch liczb dodatnich jest taki sam jak stosunek ich sumy do ich różnicy. Wyznacz ten iloraz.

Zadanie 2. Rozwiąż układ równań w zależności od parametru b

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x\cdot \mathrm{sgn}(b)+y=\mathrm{sgn}(b^2), \end{cases}$$

gdzie

$$\mathrm{sgn}(b)=\begin{cases} 1 & \text{dla} \quad b>0 \\ 0 & \text{dla} \quad b=0 \\ -1 & \text{dla} \quad b<0. \end{cases}$$

Zadanie 3. Funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ spełnia warunki

(a) $f(x+y)=f(x)+f(y)$
(b) f(1)=1.

Obliczyć $f\left(\frac{1}{4}\right)$.

Zadanie 4. Czy istnieje trójkąt, którego wysokości mają długości $1,2,3$? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 5. Wykaż, że jeżeli $a,b,c>0$, to $(a+b)(b+c)(c+a)\geq 8abc$.

Zadanie 6. Liczby pierwsze p i q, gdzie $p<q$ nazywają się bliźniacze, gdy $q=p+2$.
Uzasadnij, że liczby pierwsze p i q są bliźniacze wtedy i tylko wtedy, gdy $pq+1$ jest kwadratem liczby naturalnej.

Zadanie 7. Rozwiązać równanie

$$(x-1)(x-3)(x+5)(x+7)=297.$$

Zadanie 8. W trójkącie równoramiennym ABC, $|AC|=|BC|$, mamy dane:
$|AB|=|CD|=8$cm, gdzie CD jest wysokością tego trójkąta. Zakreślono okrąg o średnicy AC. Punkty A,C oraz punkty przecięcia okręgu z podstawą trójkąta i ramieniem BC wyznaczają czworokąt wpisany w okrąg. Wykonaj rysunek. Oblicz pole czworokąta wpisanego w okrąg.

Zadanie 9. Wykazać, że jeżeli $\sin\alpha+\cos\alpha=a$, to

$$\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=\frac{1+2a^2-a^4}{2}.$$

Zadanie 10. Ciąg Fibonacciego określony jest następująco:

$$\begin{cases} F_1=F_2=1 \\ F_{n+2}=F_{n+1}+F_n \end{cases}$$

dla $n=1,2,\ldots$
Ustal, czy liczba F_{2014} jest parzysta.

2. kolejka WMM 2014 (jesień)
6 listopada 2014, godz. 8:30
Wydział Matematyki i Informatyki UAM w Poznaniu

Zadanie 11. Oblicz sumę

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \ldots n \cdot n!$$

Zadanie 12. Wykaż, że liczba $291^8 + 3 \cdot 291^4 - 4$ jest podzielna przez 200.

Zadanie 13. Rozwiąż równanie

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{5},$$

dla $x, y \in C \setminus \{0\}$

Zadanie 14. Niech p i q będą różnymi liczbami pierwszymi oraz $n = p^2 q$. Wypisz wszystkie dzielniki naturalne liczby n. Wykaż, że ich suma jest równa $(1 + p + p^2)(1 + q)$.

Zadanie 15. Iloczyn dwóch liczb naturalnych jest równy 11016, a ich największym wspólnym dzielnikiem jest 9. Wyznacz te liczby.

Zadanie 16. Dana jest funkcja $f(x) = \frac{1}{x}$.

Udowodnij, że jeżeli $a > 0, b > 0, c > 0$, to

$$f(a+b) + f(b+c) + f(a+c) \leq f(2a) + f(2b) + f(2c).$$

Zadanie 17. Ciąg (a_n) określony jest w następujący sposób

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = 2a_n + 2^n, \text{ dla } n \geq 1 \end{cases}$$

Wyznacz a_{2014}.

Zadanie 18. Udowodnij, że w dowolnym czworokącie wypukłym $a^2 + b^2 + c^2 > \frac{1}{3}d^2$, gdzie a, b, c, d oznaczają długości boków czworokąta.

Zadanie 19. Obliczyć $\sin^2 2x$, jeżeli

$$\frac{1}{\mathrm{tg}^2 x} + \frac{1}{\mathrm{ctg}^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} = 7.$$

Zadanie 20. W trójkącie ABC dwusieczne kątów przecinają się w punkcie M. Przez ten punkt poprowadzono równoległe do prostych zawierających odcinki AB i AC, przechodzące przez bok BC w punktach D i E. Udowodnij, że obwód trójkąta MED jest równy długości odcinka BC.

3. kolejka WMM 2014 (jesień)
14 listopada 2014, godz. 8:30
Wydział Matematyki i Informatyki UAM w Poznaniu

Zadanie 21. Niech a, b, c będą długościami boków trójkąta ostrokątnego o polu równym 1. Wykazać, że prawdziwa jest nierówność

$$a + b + c > \frac{2}{a} + \frac{2}{b} + \frac{2}{c}.$$

Zadanie 22. Dana jest funkcja określona wzorem

$$f(x) = \frac{|x|}{1 + n^2x^2}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Wykaż, że $f(x) \le \frac{1}{2n}$.

Zadanie 23. Wiedząc, że α, β, γ są miarami kątów wewnętrznych trójkąta leżących naprzeciw boków o długościach a, b, c, dowieść, że

$$\sin\frac{\alpha}{2} \le \frac{a}{2\sqrt{bc}}.$$

Zadanie 24. Dana jest liczba $1 + 2^{3456789}$. Rozstrzygnąć, czy jest to liczba pierwsza.

Zadanie 25. Udowodnij, że liczba $\sqrt[3]{9 + \sqrt{80}} + \sqrt[3]{9 - \sqrt{80}}$ jest równa 3.

Zadanie 26. Symbolem $\prod_{k=m}^{n} a_k$ oznaczamy iloczyn $a_m \cdot a_{m+1} \cdot \ldots \cdot a_n$. Oblicz

$$\prod_{k=2}^{n}\left(1 - \frac{1}{k^2}\right), \qquad n = 2, 3, 4, \ldots$$

Zadanie 27. Rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} x(x + y + z) = \frac{4-\sqrt{2}}{4} \\ y(x + y + z) = 1 \\ z(x + y + z) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{cases}$$

Zadanie 28. Znajdź wszystkie takie funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, które spełniają równość

$$2f(x) + f(1 - x) = x^2,$$

dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$.

Zadanie 29. Wyznacz $f(f(f(2014)))$, jeśli $f(x) = \frac{1}{1-x}$.

Zadanie 30. Wykonaj mnożenie

$$\underbrace{333\ldots3}_{666} \cdot \underbrace{666\ldots6}_{333}$$

Półfinały WMM 2014 (jesień)
29 listopada 2014, godz. 8:30
Wydział Matematyki i Informatyki UAM w Poznaniu

Zadanie 31. Udowodnij, że jeżeli $a < b < c < d$, to równanie

$$(x-a)(x-c)+(x-b)(x-d)=0,$$

posiada dwa rozwiązania: pierwsze między a i b, drugie między c i d.

Zadanie 32. Oblicz wartość wyrażenia $x^2+\frac{1}{x^2}$, gdy $x^3+\frac{1}{x^3}=52$.

Zadanie 33. Udowodnij, że jeśli liczba naturalna n jest sumą kwadratów dwóch różnych liczb naturalnych dodatnich, to również $2n$ jest sumą kwadratów dwóch różnych liczb naturalnych dodatnich.

Zadanie 34. W trójkącie ABC miary kątów wewnętrznych wynoszą α, β, γ. Udowodnij, że

$$\sin\alpha+\sin\beta>\sin\gamma.$$

Zadanie 35. Dla jakich wartości parametru m funkcja

$$f(x)=\sin^4 x-\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x+m(\sin^4 x+\cos^4 x)$$

jest stała?

Zadanie 36. Oblicz

$$x^2+y^2+z^2-xyz$$

dla $x=999\frac{1}{999}, y=1000\frac{1}{1000}, z=999000\frac{1}{999000}$.

Zadanie 37. Dany jest prostokąt $ABCD$ oraz punkt K, który jest środkiem boku AB. Oznaczmy punkt przecięcia odcinków AC i KD literą X. Jaką część pola prostokąta stanowi pole trójkąta KXA?

Zadanie 38. Rozwiąż równanie $pqr=5(p+q+r)$, w którym p, q, r są liczbami pierwszymi.

Zadanie 39. Niech $f(x)=\frac{x^2}{1+x^2}$.
Oblicz sumę

$$f\left(\frac{1}{1}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)+\ldots+f\left(\frac{1}{10}\right)+f\left(\frac{2}{1}\right)+f\left(\frac{2}{2}\right)+\ldots+f\left(\frac{2}{10}\right)$$
$$+f\left(\frac{3}{1}\right)+f\left(\frac{3}{2}\right)+\ldots+f\left(\frac{3}{10}\right)+\ldots+f\left(\frac{10}{1}\right)+f\left(\frac{10}{2}\right)+\ldots+f\left(\frac{10}{10}\right).$$

Zadanie 40. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c zachodzi nierówność

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\geq a^2bc+ab^2c+abc^2.$$

Finał WMM 2014 (jesień)
13 grudnia 2014, godz. 8:30
Wydział Matematyki i Informatyki UAM w Poznaniu

Zadanie 41. W trójkącie ABC poprowadzono środkową CD i wyznaczono na niej taki punkt E, że $\frac{|CE|}{|ED|} = \frac{1}{3}$. Prosta przechodząca przez punkty A i E przecina bok BC w punkcie P. Udowodnij, że $\frac{|CP|}{|PB|} = \frac{1}{6}$.

Zadanie 42. Zbiór $\mathcal{M}$ zawiera wszystkie liczby siedmiocyfrowe o cyfrach różnych należących do zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Rozstrzygnij, czy w zbiorze $\mathcal{M}$ istnieje takich 77 liczb, że suma 33 z nich jest równa sumie 44 pozostałych. Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 43. Udowodnij, że jeżeli

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}$$

dla $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0, a+b+c \neq 0$, to wśród liczb a, b, c jest para liczb przeciwnych.

Zadanie 44. Rozwiąż równanie

$$\left[\frac{5+6x}{8}\right] = \frac{15x-7}{5},$$

dla $x \in \mathbb{R}$, gdzie $[a]$ oznacza część całkowitą liczby a.

Zadanie 45. Udowodnij, że liczba

$$3(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)(2^{32}+1)(2^{64}+1)$$

jest podzielna przez $2^{64} - 1$.

Zadanie 46. Na bokach AB, BC, CA trójkąta ABC dane są odpowiednio punkty M, N, P takie, że

$$\frac{|AM|}{|MB|} = \frac{|BN|}{|NC|} = \frac{|CP|}{|PA|} = k.$$

Wyznacz k, jeżeli pole trójkąta MNP jest równe $\frac{7}{25}$ pola trójkąta ABC.

Zadanie 47. Ile rozwiązań w przedziale $\langle -2\pi, 2\pi \rangle$ ma równanie

$$\sin x - \sin 3x + 2\sin 2x = 3?$$

Zadanie 48. Ile wynosi cyfra jedności liczby

$$2014^{2013^{2012^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3^{2^{1}}}}}}}}\ ?$$

Zadanie 49. Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} x+y+z+t = 4 \\ x^2+y^2+z^2+t^2 = 4 \end{cases}$$

Zadanie 50. Wyznaczyć funkcję f przedziałami liniową, jeżeli wiadomo, że

$$f(|x-1|) = 2x - 4.$$