Wielkopolskie Mecze Matematyczne

edycja pierwsza

24 maja 2014r.

W okresie renesansu we Włoszech matematycy stworzyli ciekawą formę rywalizacji intelektualnej. Wymieniali się zadaniami, a po kilku tygodniach publicznie „pojedynkowali". Każdy przedstawiał rozwiązania zadań zaproponowanych przez przeciwnika. Zwyciężał ten, kto rozwiązał większą liczbę zadań, otrzymanych wcześniej od innych startujących.

24 maja 2014 na Wydziale Matematyki i Informatyki Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza, odbyła sie pierwsza edycja Wielkopolskich Meczy Matematycznych. Zawody były wzorowane na Dolnośląskich Meczach Matematycznych. Cztery sześcioosobowe drużyny z czterech poznańskich liceów rywalizowały o zwycięstwo w tym pilotażowym przedsięwzięciu.

Turniej był współfinansowany przez Poznańską Fundację Matematyczną ze środków pozyskanych od Miasta Poznania na realizację projektu „Matematyka dla zuchwałych".

Niniejsza broszura prezentuje przebieg tej rywalizacji wraz ze składami drużyn. Zawiera także zadania konkursowe i regulamin meczu.

Składy drużyn

II Liceum Ogólnokształcące im. Generałowej Zamoyskiej i Heleny Modrzejewskiej w Poznaniu

Patryk Plewa (kapitan)
Agnieszka Link
Marek Radkowski
Franciszek Sapikowski
Robert Szary
Bartłomiej Wierzbiński

opiekun drużyny: Adrian Michałowicz

V Liceum Ogólnokształcące im. Klaudyny Potockiej w Poznaniu

Maciej Judkowiak (kapitan)
Justyna Gruszczyńska
Donata Jaskuła
Szymon Michałkiewicz
Magdalena Ochowiak
Jakub Pieńkowski

opiekun drużyny: Tamara Kowalewska

VIII Liceum Ogólnokształcące im. Adama Mickiewicza w Poznaniu

Mieczysław Krawiarz (kapitan)
Stanisław Groszewski
Piotr Janiszewski
Piotr Jaworski
Agnieszka Piechocka
Jolanta Zakrzewska

opiekun drużyny: Agnieszka Wanot

Liceum Ogólnokształcące św. Marii Magdaleny w Poznaniu

Wojciech Wawrów (kapitan)
Łukasz Bakinowski
Kuba Chmielewski
Wojciech Chojnacki
Sebastian Orwat
Karolina Ośko

opiekun drużyny: Łukasz Raczkowski

Pomysłodawca i prowadzący mecz:

Paweł Perekietka

Jury:

Jadwiga Jagieła

Agnieszka Kukla

Przemysław Pela

Tamara Kowalewska

Agnieszka Wanot

Adrian Michałowicz

Łukasz Raczkowski

Organizator:

Paweł Perekietka

z pomocą opiekunów drużyn,
Tomasza Karolaka i Poznańskiej Fundacji Matematycznej

Wyniki

Półfinały

II LO	-	V LO	31:6
VIII LO	-	LO MM	29:32

Mecz o III miejsce

VIII LO - V LO 30:27

Finał

II LO - LO MM 16:40

Klasyfikacja końcowa

I miejsce:	LO MM
II miejsce:	II LO
III miejsce:	VIII LO
IV miejsce:	V LO

Nagrody indywidualne

Agnieszka Link	II LO
Piotr Jaworski	VIII LO
Agnieszka Piechocka	VIII LO
Sebastian Orwat	LO MM

Zadania konkursowe

Mecz 1.

Zadanie 1.
Liczby a, b, c tworzą w podanej kolejności ciąg geometryczny. Wyznacz c wiedząc, że:

$$a = \left(\frac{2}{\sqrt{3}-1} + \frac{3}{\sqrt{3}-2} + \frac{15}{3-\sqrt{3}}\right)\left(\sqrt{3}+5\right)^{-1},$$
$$b = \left(\sqrt{\left(\sqrt{2}-\frac{3}{2}\right)^2} - \sqrt[3]{\left(1-\sqrt{2}\right)^3}\right)^2.$$

Zadanie 2.
Wykaż, że jeżeli $x > 0, y > 0$ oraz $xy = 25$, to $(1+x)(1+y) \geq 25$.

Zadanie 3.
Wyznacz zbiór wartości funkcji f określonej wzorem $f(x) = \frac{x+3}{x^2+7}$.

Zadanie 4.
Punkty kratowe to punkty, których obie współrzędne są liczbami całkowitymi. Wyznacz wszystkie punkty kratowe wykresu funkcji $f(x) = \frac{-4x+1}{x-3}$.

Zadanie 5.
Liczba m jest sumą kwadratów dwóch liczb całkowitych. Wykazać, że liczba $13m$ też ma tę własność.

Zadanie 6.
Udowodnij, że jeżeli a, b, c to boki trójkąta ABC i h_a, h_b, h_c, to wysokości opuszczone odpowiednio na te boki, a r- promień okręgu wpisanego, to
$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}.$$

Mecz 2.

Zadanie 1.
Rozwiąż układ równań dla $x > 0, y > 0, z > 0$

$$\begin{cases} (x+y)(x+y+z) = 72 \\ (y+z)(x+y+z) = 120 \\ (z+x)(x+y+z) = 96 \end{cases}$$

Zadanie 2.
Wyznacz sumę

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{2012\cdot 2013} + \frac{1}{2013\cdot 2014}.$$

Zadanie 3.
Udowodnij, że dla dowolnej liczby całkowitej m liczba $m^6 - 2m^4 + m^2$ dzieli się przez 36.

Zadanie 4.
Dana jest tablica liczb naturalnych zwana tablicą Pitagorasa:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ 2 & 4 & 6 & \ldots & 2n \\ 3 & 6 & 9 & \ldots & 3n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ n & 2n & 3n & \ldots & n^2 \end{bmatrix}$$

Oblicz n wiedząc, że suma wszystkich liczb w tablicy jest równa 36100.

Zadanie 5.
W kole o promieniu 10 wybrano 99 punktów. Udowodnij, że wewnątrz koła istnieje punkt odległy od każdego z wybranych punktów o więcej niż 1.

Zadanie 6.
Romb $ABCD$ o boku długości a i kącie ostrym α podzielono na trzy części o równych polach odcinkami AP i AQ ($P \in BC$, $Q \in DC$). Wyznacz długości boków AP i AQ.

Mecz o trzecie miejsce

Zadanie 1.
Co jest większe 18^{15} czy 63^{10}?

Zadanie 2.
Znajdź takie dwie liczby a i b, aby $a + b = ab = \frac{a}{b}, b \neq 0$.

Zadanie 3.
Dane jest równanie z niewiadomą x i parametrem m. Zbadaj liczbę rozwiązań równania $|x - 1| - |x| = m + 2$ ze względu na wartość parametru m.

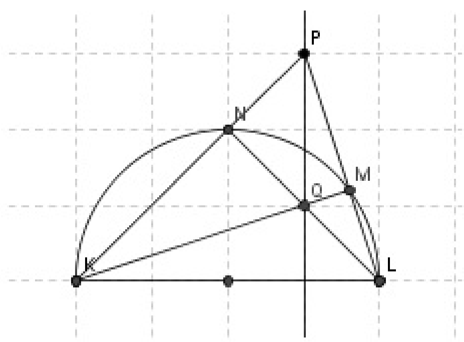
Zadanie 4.
Rozwiąż równanie

$$\sqrt{x^2 - 2^{51}x + 2^{100}} - \sqrt{x^2 + 2^{101}x + 4^{100}} = 2^{50}$$

Zadanie 5.
Wyznacz wszystkie pary (x, y) licz całkowitych, które spełniają równanie

$$(x + y - 2)(x - y - 2) - 3 = 0$$

Zadanie 6.
W półkole o średnicy KL wpisano czworokąt $KLMN$ (jak na rysunku). Boki KN i LM przedłużono do przecięcia się w punkcie P. Udowodnij, że prosta PQ (Q - punkt przecięcia przekątnych czworokąta $KLMN$) jest prostopadły do boku KL.



Finał

Zadanie 1.
Wiadomo, że

$$a+b+c=7, \qquad \frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}=\frac{7}{10}.$$

Oblicz

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}.$$

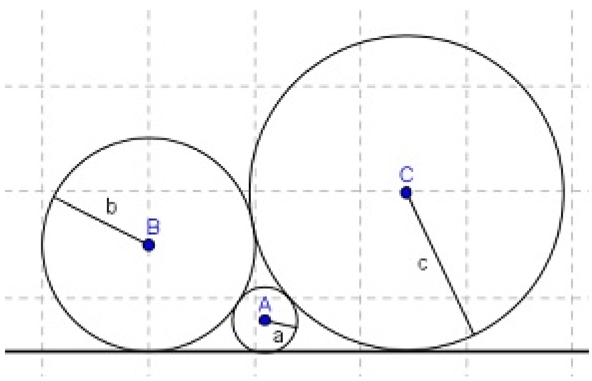
Zadanie 2.
Wykaż, że jeżeli x, y, z są liczbami dodatnimi, to

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \geq 9.$$

Zadanie 3.
Wielomian W ma postać $W(x)=x^5+a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x$, gdzie a_4, a_3, a_2, a_1 są pewnymi liczbami rzeczywistymi.
Wiedząc, że $W(2)=2, W(4)=4, W(6)=6, W(8)=8$, oblicz $W(10)$.

Zadanie 4.
Niech $\overline{ABCDE}$ oznacza zapis dziesiętnej liczby naturalnej o cyfrach A, B, C, D i E. Znaleźć różne cyfry A, B, M i T takie, że $\overline{MAMA}+\overline{TATA}=\overline{MMMMB}$.

Zadanie 5.
Mamy trzy okręgi o środkach A, B, C parami styczne, o promieniachodpowiednio a, b, c $(a<b<c)$ i styczne do prostej l tak , jak na rysunku. Uzasadnij, że $\frac{1}{\sqrt{a}}=\frac{1}{\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{c}}$.



Zadanie 6.
Dany jest trapez $ABCD$ $(AB \parallel CD)$, którego przekątne przecinają się w punkcie O. Pola trójkątów ABO i CDO wynoszą odpowiednio S_1 i S_2. Udowodnij, że pole trapezu wynosi $P=\left(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}\right)^2$.

Regulamin meczu matematycznego

1. Drużyny mają 60 minut na opracowanie rozwiązań sześciu zadań. Po tej części zaczyna się rozgrywka (właściwa część meczu).
2. W czasie rozwiązywania zadań uczniowie nie mogą się z nikim kontaktować. Należy dopilnować, aby uczestnicy meczu wyłączyli telefony komórkowe. Dozwolone jest jedynie używanie kalkulatorów prostych i tablic matematycznych. Jury może wejść do sal, aby skontrolować przebieg przygotowań.
3. Przed rozpoczęciem rozgrywki kapitanowie potwierdzają znajomość regulaminu meczu (ewentualnie Jury wyjaśnia wątpliwości).
4. Podczas rozgrywki drużyny zadają sobie na przemian zadania. Kolejność zadawania zadań w kolejnych tercjach meczu jest następująca:

I tercja	drużyna A zadaje zadanie drużynie B
	drużyna B zadaje zadanie drużynie A
II tercja	drużyna B zadaje zadanie drużynie A
	drużyna A zadaje zadanie drużynie B
III tercja	drużyna A zadaje zadanie drużynie B
	drużyna B zadaje zadanie drużynie A

Drużyna, której zadano zadanie, może je przyjąć lub odbić. Jeżeli zadanie zostanie odbite, rozwiązuje je drużyna, która je zadała.

5.1 Rozwiązanie zadania przedstawia na tablicy wybrany członek drużyny, nie kontaktując się z pozostałymi zawodnikami. Przedstawiający rozwiązanie może korzystać z notatek. Dobrze, aby cały zapis rozwiązania pozostał na tablicy.

5.2 Każdy zawodnik może prezentować rozwiązanie co najwyżej jednego zadania.

6. Po zakończeniu prezentacji rozwiązania i ewentualnym jej uzupełnieniu przez kapitana drużyny, głos zabiera drużyna przeciwna. Może zgłaszać uwagi, zastrzeżenia, komentarze, prosić prezentującego rozwiązanie o dodatkowe wyjaśnienia, przedstawić uproszczenie rozwiązania itp. Dodatkowe pytania mogą też zadawać jurorzy.

7.1 Po zakończeniu dyskusji jurorzy oceniają tylko oryginalne rozwiązanie (tzn. nie biorą pod uwagę komentarzy kapitana) w skali 0-10 (liczbami całkowitymi). Punkty odejmuje się za wszystkie luki w rozumowaniu. Oceniana jest formalna poprawność, sposób rozwiązania oraz język prezentacji. Jeśli rozwiązanie jest poprawne, ale żmudne, zawiłe i daje się istotnie uprościć - stanowi to podstawę do odjęcia punktów.

7.2 Ocena za rozwiązanie zadania przyznana drużynie to zaokrąglona do liczby całkowitej średnia arytmetyczna ocen członków Jury (z wyłączeniem jednej z najniższych i jednej najwyższych ocen). Zadanie uznane za nierozwiązane może być ocenione w skali 0-5, a uznane za rozwiązane - w skali 6-10.

8.1 W przypadku zadania, ocenionego przez Jury na 0-9 punktów, drużyna przeciwna otrzymuje dodatkowe dwa punkty, jeśli zgłosiła w swoich uwagach istotne zastrzeżenia (lub przedstawiła istotnie krótszy lub łatwiejszy sposób rozwiązania). O przyznaniu dodatkowych punktów Jury decyduje w głosowaniu (większością głosów).

8.2 Jeśli usterki wskazał wcześniej kapitan drużyny rozwiązującej zadanie, zabiera przeciwnikom możliwość przejęcia punktów „za uwagi".

9. Drużyna, która rozwiązywała zadanie podane przez przeciwników, otrzymuje tyle punktów, ile wynosiła ocena jej rozwiązania (punktacja 0-10). W przypadku zadania odbitego liczba n punktów przyznanych za rozwiązanie wynika z tabeli (p jest oceną rozwiązania zadania):

p	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n	-5	-4	-3	-2	-1	0	2	4	6	8	10

10. Podczas meczu sędzia techniczny (po zasięgnięciu opinii i uzyskaniu aprobaty większości składu Jury) może przyznać zawodnikowi "żółtą kartkę" za niesportowe zachowanie. Po dwukrotnym otrzymaniu żółtej kartki zawodnik zostaje wykluczony z meczu.

11.1 Po zakończeniu trzeciej tercji każdy z członków Jury dokonuje wyboru wyróżniającej się prezentacji. Jeśli jeden z autorów prezentacji zdobył większość głosów, to otrzymuje nagrodę. Jeśli ta procedura nie pozwoli ustalić wyróżniającej się prezentacji, to głosowanie Jury zostaje powtórzone - głosy oddaje się jednak tylko na prezentacje, które w poprzednim głosowaniu zdobyły największą liczbę głosów.

11.2 Jeśli liczby punktów obu drużyn są równe, to zwycięzcą zostaje drużyna, która za prezentacje rozwiązań częściej otrzymywała 10 pkt. Jeśli to kryterium okaże się niewystarczające, to należy rozpatrywać kolejno: liczbę zadań ocenionych na 9 pkt., 8 pkt. itd. Jeśli ta procedura nie pozwoli ustalić zwycięzcy, wówczas wygrywa ta drużyna, której zawodnik został wyróżniony nagrodą.

12. Inne szczegółowe ustalenia dotyczące przebiegu meczu są w gestii Jury.

Regulamin jest wzorowany na regulaminie
Dolnośląskich Meczów Matematycznych